Liaisons équivalentes

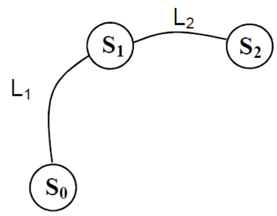
Table des matières

Chaînes de solides

Chaîne ouverte

Une chaîne ouverte est constituée de solides assemblés en série.

Exemples : grue de chantier, robot de peinture, pelleteuse,...



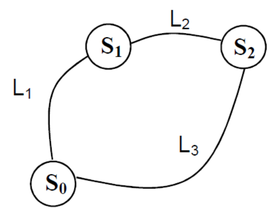
Chaîne ouverte

Chaîne fermée simple

Une chaîne fermée simple est une chaîne ouverte dont les solides extrêmes ont une liaison.

Exemple : réducteur à un train d'engrenages.

L'ensemble des solides forment alors un **cycle** ou une **boucle**.

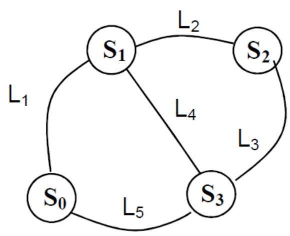


Chaîne fermée simple

Chaîne fermée complexe

Une chaîne fermée complexe est constituée de chaînes fermées simples imbriquées.

Exemple : réducteur à train épicycloïdal.



Chaîne fermée complexe

Nombre cyclomatique

Définition

Le graphe de structure fait apparaître n pièces (sans le bâti) et l liaisons.

On définit le **nombre cyclomatique** du graphe : c'est le nombre de cycles indépendants γ dans le graphe : $\gamma = l - n$.

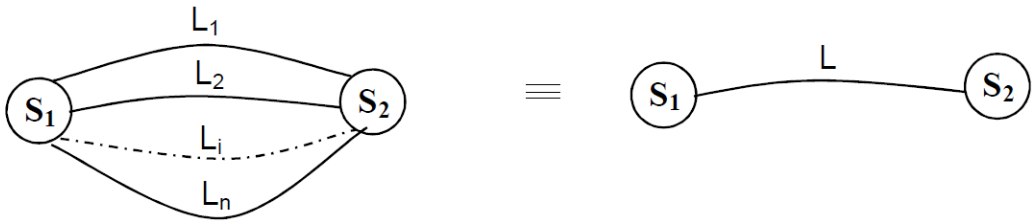
Liaisons équivalentes

Objectifs

Savoir déterminer une liaison équivalente à plusieurs liaisons.

1. Liaisons en parallèle

Fondamental



1.1. Du point de vue statique

Dans le cas où l'on a n liaisons L_i, si l'on applique le P.F.S. à S_2, on a : $\sum \{\mathcal{T}_{i\ S_i \to S_2}\} + \{\mathcal{T}_{Ext \to S_2}\} = \{0\}$.

Dans le cas où l'on a une liaison équivalente, si l'on applique le P.F.S. à S_2, on a : $\left\{\mathcal{T}_{eq\ S_1 \to S_2}\right\} + \{\mathcal{T}_{Ext \to S_2}\} = \{0\}$.

Définition

$$\left\{\mathcal{T}_{eq\ S_1 \to S_2}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{T}_{i\ S_i \to S_2}\}$$

1.2. Du point de vue cinématique

On peut effectuer autant de fermetures cinématiques indépendantes que le nombre cyclomatique : chaque fermeture peut donner jusqu'à 6 équations cinématiques.

- $\{\mathcal{V}_{2\ S_1/S_2}\} + \{\mathcal{V}_{1\ S_2/S_1}\} = \{0\}$ soit $\{\mathcal{V}_{2\ S_1/S_2}\} = \{\mathcal{V}_{1\ S_1/S_2}\}$
- $\{\mathcal{V}_{3\ S_1/S_2}\} + \{\mathcal{V}_{2\ S_2/S_1}\} = \{0\}$ soit $\{\mathcal{V}_{3\ S_1/S_2}\} = \{\mathcal{V}_{2\ S_1/S_2}\}$
- ...
- $\{\mathcal{V}_{i\ S_1/S_2}\} + \{\mathcal{V}_{i-1\ S_2/S_1}\} = \{0\}$ soit $\{\mathcal{V}_{i\ S_1/S_2}\} = \{\mathcal{V}_{i-1\ S_1/S_2}\}$

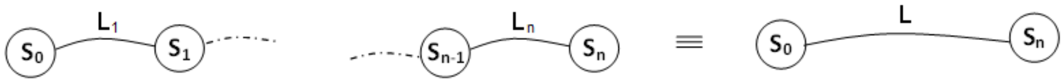
Ainsi $\{\mathcal{V}_{i\ S_1/S_2}\} = \{\mathcal{V}_{i-1\ S_1/S_2}\}$

Définition

$$\left\{\mathcal{V}_{eq\ S_1/S_2}\right\} = \{\mathcal{V}_{i\ S_1/S_2}\}\ \forall\ i$$

2. Liaisons en série

Fondamental



2.1. Du point de vue statique

En appliquant le P.F.S. à S_0, on obtient :

$\{\mathcal{T}_{ext \to S_0}\} + \{\mathcal{T}_{S_1 \to S_0}\} = \{0\}$ soit $\{\mathcal{T}_{ext \to S_0}\} = \{\mathcal{T}_{S_0 \to S_1}\}$

En appliquant le P.F.S. à $S_0 + S_1 + \ldots + S_{i-1}$, on obtient :

$\{\mathcal{T}_{ext \to S_0}\} + \{\mathcal{T}_{S_i \to S_{i-1}}\} = \{0\}$ soit $\{\mathcal{T}_{ext \to S_0}\} = \{\mathcal{T}_{S_{i-1} \to S_i}\}$

En considérant cette fois-ci la liaison équivalente, et en appliquant le P.F.S. à S_0, on obtient :

$\{\mathcal{T}_{ext \to S_0}\} + \{\mathcal{T}_{S_n \to S_0}\} = \{0\}$ soit $\{\mathcal{T}_{ext \to S_0}\} = \{\mathcal{T}_{S_0 \to S_n}\}$

Définition

$$\{\mathcal{T}_{S_0 \to S_n}\} = \{\mathcal{T}_{S_{i-1} \to S_i}\} \ \forall\, i$$

2.2. Du point de vue cinématique

La **composition des mouvements**, vue dans le cours portant sur le mouvements relatifs entre solides, permet d'écrire la relation suivante.

Définition

$$\{\mathcal{V}_{S_n/S_0}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{V}_{S_i/S_{i-1}}\}$$

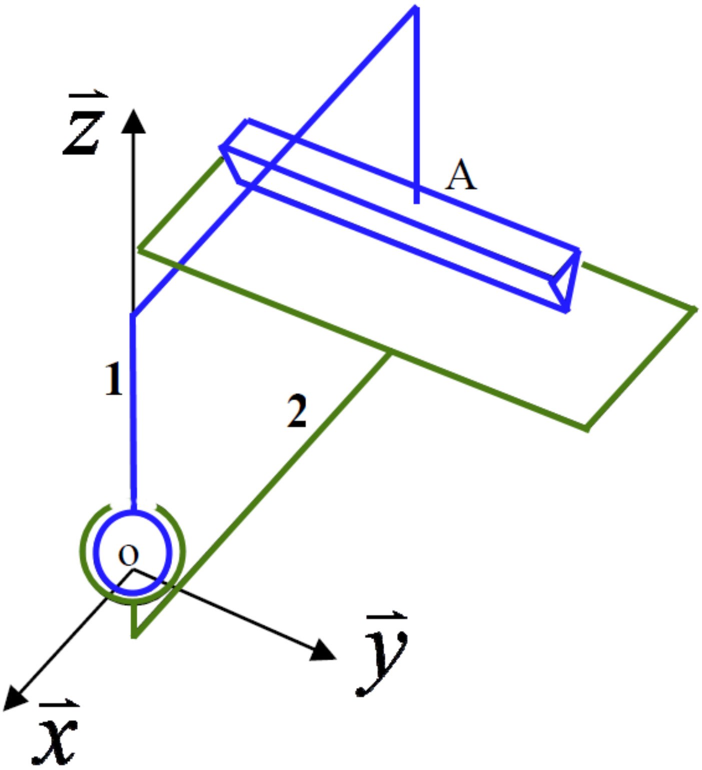
Que faire avec les torseurs ?

	Parallèle	Série
$\{\mathcal{T}\}$	+	=
$\{\mathcal{V}\}$	=	+

Exercice : Exemple d'une détermination d'une liaison équivalente

Pour l'assemblage représenté ci-après, on a :

- un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec $\overrightarrow{OA} = -a\ \vec{x}$
- le point O centre de la sphère
- le point A appartenant à la ligne de contact entre 1 et 2



Question

[solution n°1 p. 7]

Déterminer la liaison équivalente entre les pièces 1 et 2.

Indice :

En traçant un graphe des liaisons, il est facile de savoir si les liaisons sont en série ou en parallèle. Utiliser ensuite les torseurs cinématiques ou d'actions mécaniques transmissibles pour obtenir le résultat.

Solutions des exercices

Solution n°1

[exercice p. 6]

Série ou parallèle ?

Les deux liaisons sont en **parallèle**. Les torseurs d'actions mécaniques transmissibles doivent dont être **sommés**, alors que les torseurs cinématiques doivent être **égalisés**.

Première possibilité : torseurs d'actions mécaniques transmissibles

A priori, ce choix est le moins lourd car la liaison linéaire rectiligne (cylindre plan) contient davantage de zéros dans son torseur d'actions mécaniques que dans son torseur cinématique. Pour la rotule, cela n'a pas d'importance (autant de zéros que d'inconnues).

Liaison rotule de centre O : $\{\mathcal{F}_{1\to 2}\} = {}_O\left\{\begin{array}{cc} X_r & 0 \\ Y_r & 0 \\ Z_r & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Liaison linéaire annulaire de normale $\vec{z}$ et de contact suivant $(A,\vec{y})$: $\{\mathcal{F}_{1\to 2}\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} 0 & L_l \\ 0 & 0 \\ Z_l & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

En observant le mécanisme et en essayant mentalement de le faire bouger, on s'aperçoit que la pièce 1 ne pourra tourner qu'autour de $(O,\vec{z})$ par rapport à 2. La liaison équivalente semble donc être une pivot d'axe $(O,\vec{z})$. On a donc tout intérêt à exprimer les deux torseurs en O afin de les "réunir" et de faire apparaître le torseur de la liaison équivalente.

Liaison linéaire annulaire de normale $\vec{z}$ et de contact suivant $(A,\vec{y})$ exprimé en O : $\{\mathcal{F}_{1\to 2}\} = {}_O\left\{\begin{array}{cc} 0 & L_l \\ 0 & aZ_l \\ Z_l & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ car $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{OA} \wedge Z_l\vec{z}$ soit $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = L_l\vec{x} - a\vec{x} \wedge Z_l\vec{z}$

En **sommant** les deux torseurs exprimés au point O, on obtient : $\{\mathcal{F}_{1\to 2}\} = {}_O\left\{\begin{array}{cc} X_r & L_l \\ Y_r & aZ_l \\ Z_r + Z_l & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ ce qui correspond à une **liaison pivot d'axe** $(O,\vec{z})$.

Deuxième possibilité : torseurs cinématiques

Liaison rotule de centre O : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_O\left\{\begin{array}{cc} \omega_{xr} & 0 \\ \omega_{yr} & 0 \\ \omega_{zr} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Liaison linéaire annulaire de normale $\vec{z}$ et de contact suivant $(A,\vec{y})$: $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} 0 & V_{xl} \\ \omega_{yl} & V_{yl} \\ \omega_{zl} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Liaison linéaire annulaire de normale $\vec{z}$ et de contact suivant $(A, \vec{y})$ exprimé en O : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{array}{c} \\ \\ A \end{array} \left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_{xl} \\ \omega_{yl} & V_{yl} + a\omega_{zl} \\ \omega_{zl} & -a\omega_{yl} \end{array} \right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ car $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{OA} \wedge \left(\omega_{yl}\vec{y} + \omega_{zl}\vec{z}\right)$ soit $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \left(V_{xl}\vec{x} + V_{yl}\vec{y}\right) - a\vec{x} \wedge \left(\omega_{yl}\vec{y} + \omega_{zl}\vec{z}\right)$

En égalisant les deux torseurs exprimés au point O, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \omega_{x\ equivalent} & = & \omega_{xr} & = & 0 \\ \omega_{y\ equivalent} & = & \omega_{yr} & = & \omega_{yl} \\ \omega_{z\ equivalent} & = & \omega_{zr} & = & \omega_{zl} \\ V_{x\ equivalent} & = & V_{xl} & = & 0 \\ V_{y\ equivalent} & = & V_{yl} + a\omega_{zl} & = & 0 \\ V_{z\ equivalent} & = & -a\omega_{yl} & = & 0 \end{array} \right.$$

La dernière équation donne $\omega_{yl} = 0$, donc $\omega_{y\ equivalent} = 0$. Il ne reste donc plus que $\omega_{z\ equivalent}$ non nul.

Le torseur de la liaison équivalente s'écrit donc en O de la façon suivante : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{array}{c} \\ \\ A \end{array} \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{zl} & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$, ce qui correspond bien à une **liaison pivot d'axe** $(O, \vec{z})$.