

# **Modélisation des actions mécaniques : modèle global**

# Table des matières

I - Passage du modèle local au modèle global	3
II - Modèle volumique : pesanteur	4
1. Modèle global d'une action de pesanteur.....	4
2. Position du centre de gravité.....	4
2.1. Principe de détermination.....	4
2.2. Exercice : Centre de gravité obtenu par méthode intégrale.....	6
2.3. Exercice : Centre de gravité obtenu par méthode barycentrique.....	7
2.4. Exercice : Centre de gravité obtenu par utilisation des théorèmes de Guldin.....	7
III - Exercice : Modèle surfacique, sans frottement	8
IV - Exercice : Modèle surfacique, avec frottement	9

# Passage du modèle local au modèle global

Modéliser de façon **globale** l'action correspondant au champ de force revient à considérer **l'ensemble de toutes** les forces élémentaires, lorsque **le point courant parcourt le domaine** où s'exerce l'action.

Le champ de vecteurs des forces élémentaires a la propriété d'être **équiprojectif**. Il peut donc être **représenté par** l'outil mathématique **torseur**. Celui-ci sera alors constitué de deux vecteurs (ou « *éléments de réduction* »), la **résultante** et le **moment**.

## Torseur d'actions mécaniques exercées par 1 sur 2

Définition

En parcourant un domaine  $D$  (point, ligne, surface ou volume) avec un point courant  $P$  :

- La **résultante** sera la **somme** de toutes les actions mécaniques locales en chaque point du domaine :

$$\overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} = \int_D d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

- Le **moment** exprimé en un point précis (par exemple  $A$ ), sera la **somme** de tous les moments exprimés en  $A$

dus à chaque action mécanique locale du domaine : 
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_D \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\{\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}}$$

Remarque

Comme tout torseur, la résultante garde son expression en tout point, tandis que le **moment a besoin d'un point bien précis** pour être exprimé.

La relation de **Varignon** est bien entendu valable : 
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{B,1 \rightarrow 2} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A,1 \rightarrow 2} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2}$$

Attention

- $\{\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$  est un **torseur glisseur**.

Il garde sa forme caractéristique tant que son moment est nul : cela correspond à une droite sur laquelle on peut déplacer (ou **glisser**) son point d'expression.

- $\{\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}$  est un **torseur couple**.

Il garde sa forme caractéristique **en tout point** (qui n'a donc pas besoin d'être indiqué).

# Modèle volumique : pesantEUR



## 1. Modèle global d'une action de pesantEUR

### Adaptation du modèle local

La force élémentaire du modèle local volumique est  $\overrightarrow{dF_{(P)}} = q_{(P)} \cdot dV \cdot \overrightarrow{u_{(P)}}$ , avec pour la pesantEUR :

- $q_{(P)} = \rho_{(P)} \cdot g$ , avec souvent  $\rho_{(P)} = \rho$  (matériau homogène où  $\rho$  est la même en tout point)
- $\overrightarrow{u_{(P)}}$  est toujours dirigé vers le centre de la Terre, donc bien souvent le même en tout point  $P$

### Résultante du modèle global

$$\overrightarrow{R} = \int_D \overrightarrow{dF_{(P)}} = \int_D \rho_{(P)} g dV \cdot \overrightarrow{u_{(P)}} = \rho g \int_D dV \vec{u} = m g \vec{u}$$

$\overrightarrow{R}$  correspond au **pooids** du système isolé.

### Moment du modèle global

$$\overrightarrow{M}_A = \int_D \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{dF_{(P)}} = \int_D \overrightarrow{AP} \wedge g \rho dV \vec{u} = g \int_D \overrightarrow{AP} dm \wedge \vec{u} \text{ avec } dm = \rho dV$$

Introduisons un point quelconque G (fixe) :

$$\overrightarrow{M}_A = g \int_D (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}) dm \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AG} \wedge g \int_D dm \vec{u} + g \int_D \overrightarrow{GP} dm \wedge \vec{u}$$

$$\text{Cela donne } \overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{AG} \wedge m g \vec{u} + g \int_D \overrightarrow{GP} dm \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R} + g \int_D \overrightarrow{GP} dm \wedge \vec{u}$$

On pourra toujours définir le point **G**, appelé **centre de gravité**, tel que  $\int_D \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$

$$\text{Cela donnera } \overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_G + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R} \text{ avec } \overrightarrow{M}_G = \vec{0}.$$

*Fondamental*

Ainsi, pour le modèle global, la méthode sera la suivante :

1. obtention du **pooids** par produit de la masse totale par l'accélération de la pesantEUR : ( $\rightarrow$  **résultante** du torseur)
2. recherche et obtention du **centre de gravité G**
3. expression du **torseur global en G**, afin d'avoir un glisseur (où le **moment** sera donc le vecteur **nul**)

## 2. Position du centre de gravité

### 2.1. Principe de détermination

*Fondamental*

La position dans l'espace du centre de gravité ou centre de masse, peut être obtenue de trois manières :

- méthode intégrale
- méthode barycentrique
- méthode de Guldin

*Attention*

Généralement, le système dont on cherche à connaître le poids est considéré comme **homogène** : sa masse volumique est la même en tout point : les trois méthodes sont alors possibles.

En revanche, si la masse volumique varie, il est alors nécessaire de "partir" du modèle local et d'intégrer sur le volume délimitant le système : la méthode par intégration est la seule possible.

**Toujours commencer par une étude des symétries****Méthode**

Le centre de gravité d'un solide est toujours situé dans un plan de symétrie, ou sur un axe de symétrie (s'ils existent)

## a) Méthode intégrale

**Définition**

$$\int_D \overrightarrow{GP} dm = \vec{0} \Rightarrow m \overrightarrow{OG} = \int_D \overrightarrow{OP} dm$$

## b) Méthode barycentrique

**Définition**

$$\left( \sum_1^n m_i \right) \cdot \overrightarrow{OG} = \sum_i^n \left( m_i \cdot \overrightarrow{OG}_i \right)$$

Avec un solide 2 soustrait au solide 1

**Exemple**

$$(m_1 - m_2) \cdot \overrightarrow{OG} = m_1 \cdot \overrightarrow{OG}_1 - m_2 \cdot \overrightarrow{OG}_2$$

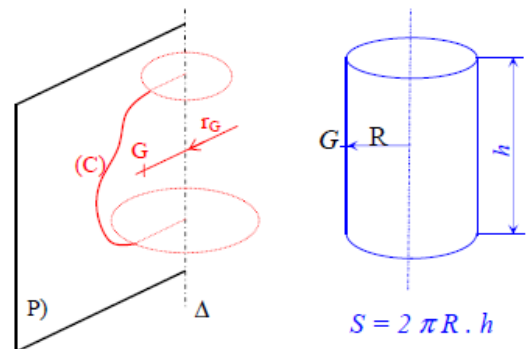
## c) Méthode de Guldin

**Remarque**Les deux théorèmes de Guldin permettent de trouver des surfaces, des volumes, ou encore la position de centres de gravité d'une **ligne** ou d'une **surface**.**Attention**

Les théorèmes de Guldin ne permettent pas d'obtenir directement la position du centre de gravité d'un volume ! En revanche, en raisonnant avec les symétries du volume, on pourra ramener le problème à un plan et utiliser Guldin efficacement.

**i) Premier théorème de Guldin**

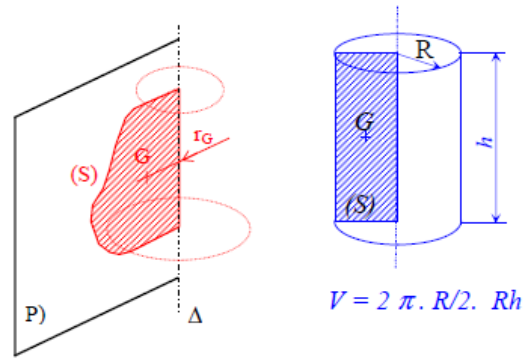
L'aire de surface engendrée par une courbe plane  $C$  tournant autour d'un axe  $\Delta$  de son plan  $P$ , **ne la traversant pas**, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité :  $S = 2\pi r_G L$



Premier théorème de Guldin

## ii) Deuxième théorème de Guldin

Le volume engendré par une surface  $S$  plane tournant autour d'un axe  $\Delta$  de son plan, **ne la traversant pas**, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité :  $V = 2\pi r_G S$



Deuxième théorème de Guldin

**Attention**

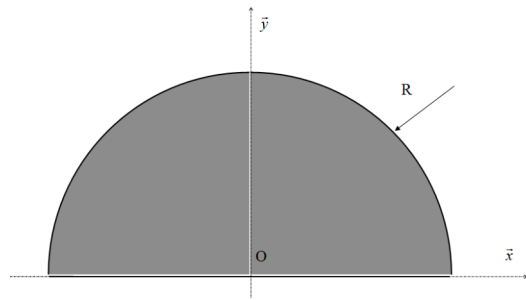
Ne pas confondre les deux surfaces suivantes, bien différentes :

- la surface  $S$  du premier théorème, créée par la rotation de la courbe  $C$
- la surface  $S$  du deuxième théorème, qui va créer le volume  $V$  par rotation

## 2.2. Exercice : Centre de gravité obtenu par méthode intégrale

Demi-disque

Soit un demi disque de rayon  $R$ . On pose un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .



Hypothèses simplificatrices

On considère le solide comme étant suffisamment mince pour **traiter le problème de façon plane**, et affecter une masse **surfactive**  $\rho$  en  $kg/m^2$

Les masses  $m$  et  $dm$  sont respectivement égales à  $\rho S$  et  $\rho dS$

Question

Déterminer la position du centre de gravité du demi-disque.

**Indice :**

Par symétrie, le centre de gravité  $G$  est situé sur l'axe  $(G, \vec{y})$ . Il s'agit donc uniquement de connaître la hauteur de  $G$  par rapport à  $O$ .

On peut donc projeter l'équation vectorielle de la définition sur le vecteur  $\vec{y}$ .

**Indice :**

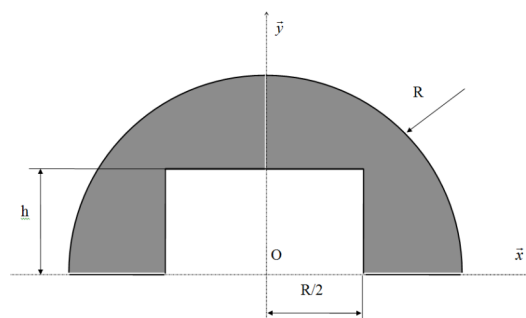
Le domaine d'intégration est un demi-disque : le système de coordonnées polaires est donc indiqué.

Les frontières du domaine seront donc délimitées par :

- un rayon  $r$  évoluant de  $0$  à  $R$
- un angle  $\theta$  évoluant de  $0$  à  $\pi$ .

### 2.3. Exercice : Centre de gravité obtenu par méthode barycentrique

Soit une plaque homogène semi-circulaire de rayon  $R$ , d'épaisseur  $e$ , de laquelle on a retiré une section rectangulaire de même épaisseur, de hauteur  $h$  et de longueur  $R$ .



L'origine du repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est placée à mi-épaisseur de la plaque.

Question

Déterminer la position du centre de gravité de cette plaque.

**Indice :**

Par symétrie vis-à-vis de l'épaisseur de la plaque, le centre de gravité est situé dans le plan au milieu de l'épaisseur.

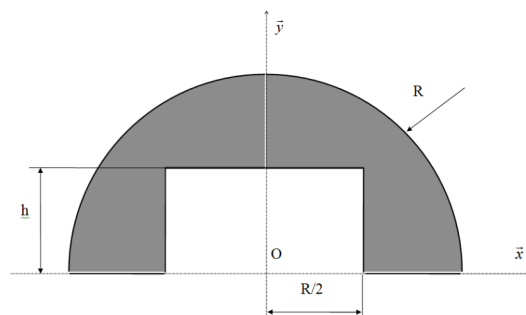
Il est également situé dans le plan  $(O, \vec{y}, \vec{z})$  qui est aussi plan de symétrie.

**Indice :**

Le centre de gravité  $G$  est donc situé sur l'axe  $(G, \vec{y})$ . Il s'agit alors uniquement de connaître la hauteur de  $G$  par rapport à  $O$  : on peut donc projeter l'équation vectorielle de la définition sur le vecteur  $\vec{y}$ .

### 2.4. Exercice : Centre de gravité obtenu par utilisation des théorèmes de Guldin

Soit un disque homogène semi-circulaire plan de rayon  $R$ , duquel on a retiré une section rectangulaire de hauteur  $h$  et de longueur  $R$ .



Question

Déterminer la position du centre de gravité de cette surface.

**Indice :**

Les théorèmes de Guldin ne permettent d'obtenir que la position du centre de gravité d'une aire ou d'une ligne, pas d'un volume. Ici la recherche du centre de gravité est donc possible (second théorème).

**Indice :**

Il faut imaginer faire tourner la surface autour d'un axe, mais il faut que l'axe ne traverse pas la surface. Ce sera donc ici  $(O, \vec{x})$ .

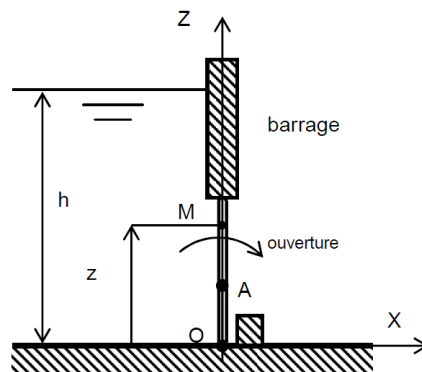
# Exercice : Modèle surfacique, sans frottement



## Vanne à ouverture automatique

Le dispositif représenté ci-dessous permet de maintenir constant le niveau dans un bassin. A partir d'une certaine hauteur d'eau  $h$ , la vanne s'ouvre automatiquement sous l'action des forces dues à la pression de l'eau. Lorsque le niveau de l'eau a baissé, la vanne se referme sans intervention.

La vanne a une forme rectangulaire de hauteur  $b = 0,6m$  et de longueur  $2L = 1m (-L \leq y \leq L)$ . La vanne est articulée par rapport au barrage en  $A$  tel que  $\overrightarrow{OA} = a\vec{z}$ . L'eau exerce sur la vanne une action mécanique définie par une densité surfacique d'effort :  $f_M = \rho_e g (h - z_M)$  où  $\rho_e$  est la masse volumique de l'eau,  $g$  l'accélération de la pesanteur, et  $z_M$  la hauteur du point courant  $M$ .



On donne :  $\rho_e = 1kg/dm^3$ ,  $g = 9.81m/s^2$  et  $a = 0.27m$

**Hypothèses :**

- L'épaisseur et le poids de la vanne sont négligés
- La liaison pivot en  $A$  est parfaite

### Question 1

Déterminer en  $O$  le torseur d'actions mécaniques exercées par l'eau sur la vanne.

**Indice :**

La modélisation locale donne  $d\overrightarrow{F}_{eau \rightarrow b(M)} = \rho_e g (h - z_M) dy dz \vec{x}$

**Indice :**

Le domaine d'intégration est le **rectangle** (les coordonnées cartésiennes sont donc à privilégier) de hauteur  $b$ , de longueur  $2L$ .

### Question 2

Déterminer la position du centre de poussée de l'eau sur la vanne (le centre de poussée est tel que l'action de l'eau sur la vanne soit modélisable par un glisseur).

En déduire à partir de quelle hauteur  $h$  la vanne s'ouvre, et faire l'application numérique.

**Indice :**

Le centre de poussée est un point  $C$  tel que  $\overrightarrow{M}_{C,eau \rightarrow vanne} = \vec{0}$ . Or, le moment en  $O$  est connu (cf. question précédente).

**Indice :**

Pour obtenir la hauteur à partir de laquelle la vanne s'ouvre, il suffit d'écrire que le centre de poussée est **au-dessus** de l'articulation de la vanne.



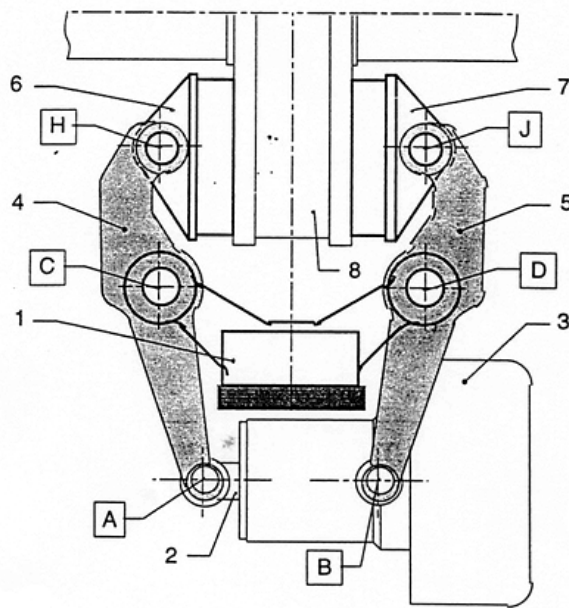
# Exercice : Modèle surfacique, avec frottement

## IV

### Frein à disque de train à grande vitesse



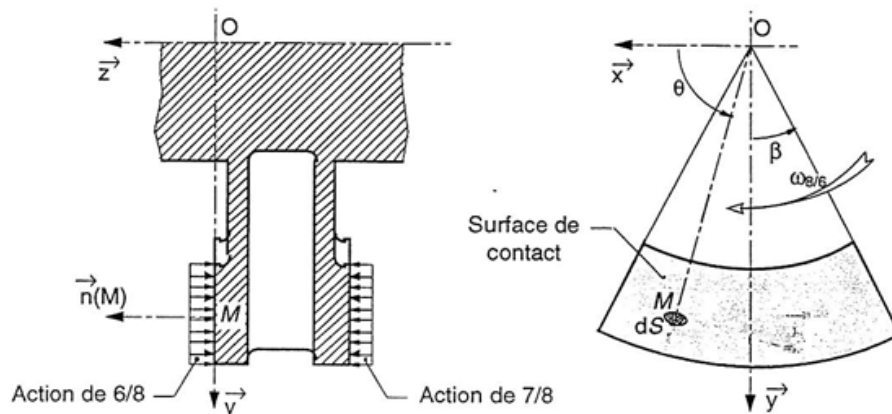
Ce frein est composé d'un vérin hydraulique flottant (2,3) agissant sur deux leviers mobiles (4) et (5) en rotation par rapport au châssis (1) et assurant l'effort presseur des plaquettes (6) et (7) sur le disque (8).



Connaissant la pression de contact (considérée comme uniforme :  $p(M) = p_0$  (avec  $p_0$  constante) entre les plaquettes et le disque, l'objectif est de déterminer le modèle global des actions mécaniques exercées par une plaquette sur le disque.

Les plaquettes de frein sont des sections circulaires d'angle  $2\beta$ , de rayon intérieur  $R_1$  et de rayon extérieur  $R_2$  :  $\frac{\pi}{2} - \beta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \beta$  et  $R_1 \leq r \leq R_2$ .

Le coefficient de frottement entre les plaquettes de frein et le disque est noté  $f$ .



## Question 1

En faisant l'hypothèse que le système est en cours de glissement, déterminer le torseur des actions mécaniques de (6) sur (8) au point  $O$ .

**Indice :**

La modélisation locale a donné pour la composante normale  $\overrightarrow{dF}_N = -p_0 r d\theta dr \vec{z}$  et  $\overrightarrow{dF}_T = f p_0 r d\theta dr \vec{t}_{(M)}$  avec  $\vec{t}_{(M)}$  s'opposant à  $\overrightarrow{V}(M \in 8/6)$  pour la composante tangentielle.

## Question 2

Effectuer l'application numérique :  $R_1 = 155mm$  ;  $R_2 = 305mm$ ,  $\beta = 25$ ,  $p_0 = 0.5 MPa$ ,  $f = 0.25$ .