

Vecteurs

Table des matières

I - Vecteurs	3
II - Base et repère	4
III - Composantes d'un vecteur	5
1. Composantes scalaires d'un vecteur dans l'espace.....	5
1.1. en coordonnées cartésiennes.....	5
1.2. en coordonnées cylindriques.....	5
1.3. en coordonnées sphériques.....	6
2. Composantes vectorielles d'un vecteur dans l'espace.....	6
IV - Opérations vectorielles	7
1. Somme.....	7
2. Produit scalaire.....	7
3. Produit vectoriel.....	8
4. Produit mixte.....	8
V - Changement de base	10
1. Bases 1 et 2 : exemple simple	10
2. Exercice : de 2 vers 1.....	10
3. Exercice : de 1 vers 2.....	11
VI - Entraînement	12
1. Exercice : Vecteurs et opérations vectorielles.....	12
2. Exercice : Changements de base.....	13
3. Exercice : Pertinence du choix de la base.....	13

Vecteurs

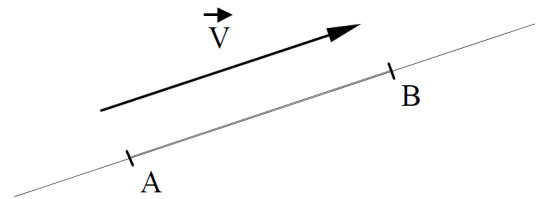
Définition

Vecteur libre

Soient A et B, deux points de l'espace. Le **vecteur libre** $\vec{AB} = \vec{V}$ désigne l'un des bipoints équipollents au bipoint (A, B).

Il est caractérisé par :

1. une **direction**
2. un **sens**
3. une **norme**, ou **intensité**, ou **module**



Définition

Vecteur glissant

Le **vecteur glissant** (A, \vec{V}) désigne l'un des bipoints équivalents au bipoint (A, B) qui ont la même droite **support** que (A,B).

Il est caractérisé par :

1. un **support** (une direction et un point)
2. un **sens**
3. une **norme**

L'ensemble des vecteurs glissants est appelé **glisseur**.

Définition

Vecteur lié

Le vecteur lié $[\vec{V}]$ est le représentant du bipoint (A, B), et a pour origine A.

Il est caractérisé par :

1. une **origine**
2. une **direction**
3. un **sens**
4. une **norme**

Définition

Norme

La norme d'un vecteur est notée $\|\vec{AB}\|$ et est positive.

On peut l'obtenir en calculant la racine carrée du *produit scalaire* (cf. p.7) du vecteur avec lui-même :

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

Base et repère



Base

Définition

Dans un espace vectoriel à trois dimensions, le triplet $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vecteurs linéairement indépendants désigne une **base** (b_1) , par exemple).

Elle est dite **orthogonale** si les produits scalaires des vecteurs pris deux à deux sont nuls :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \forall (i, j) \in (1, 2, 3) \text{ avec } i \neq j$$

Elle est dite **orthonormée** si, en plus, la norme des vecteurs vaut **1** :

$$\forall (i, j) \in (1, 2, 3), \|\vec{e}_i\| = 1$$

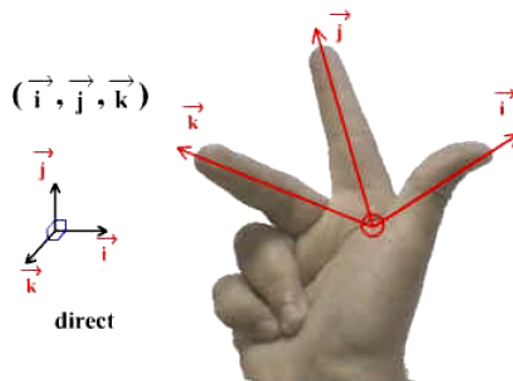
Elle est dite **orthonormée directe** si enfin $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forme un **trièdre direct** (c'est-à-dire si $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$)

Trois doigts de la main droite

Fondamental

Une astuce simple pour vérifier si un trièdre est direct, est d'utiliser les trois doigts de la main droite. **Dans l'ordre de lecture** du triplet de vecteurs, par exemple $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

- le **premier** vecteur \vec{i} est associé au **pouce**
- le **deuxième** vecteur \vec{j} est associé à l'**index**
- le **troisième** vecteur \vec{k} est associé au **majeur**, qui se déploie perpendiculairement au plan formé par le pouce et l'index.



Attention

Ne pas se tromper de main : la main gauche donnerait un trièdre indirect !

Repère

Définition

En associant un point (par exemple A) à cette base, on obtient un repère $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, aussi noté (A, b_1) .

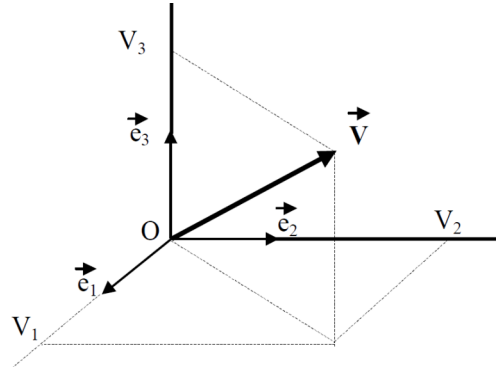
Composantes d'un vecteur



1. Composantes scalaires d'un vecteur dans l'espace

On peut exprimer un vecteur à l'aide d'une combinaison linéaire de ses composantes scalaires dans cette base.

1.1. en coordonnées cartésiennes



$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3$$

Écriture "colonne" d'un vecteur

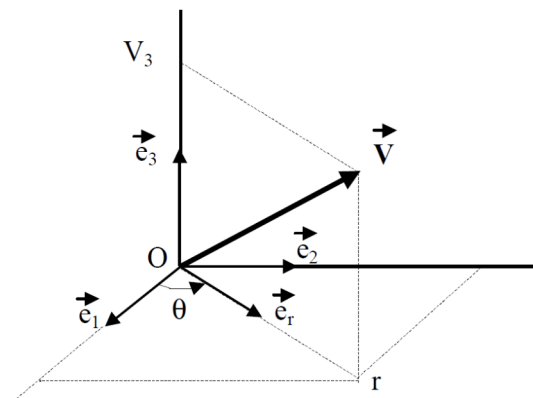
Syntaxe

Afin d'écrire de manière concise et détaillée un vecteur grâce à ses composantes, on utilise la présentation suivante :

$$\vec{V} = \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \right\}_{b_1}, \text{ ou } \vec{V} = \left| \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \right|_{b_1}$$

V_1, V_2 et V_3 sont appelées les **coordonnées** du vecteur V .

1.2. en coordonnées cylindriques

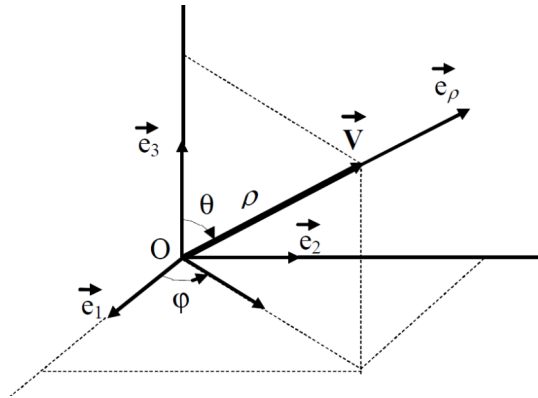


$$\vec{V} = r \vec{e}_r + V_3 \vec{e}_3$$

Remarque

\vec{e}_r est de norme unitaire mais **n'est pas fixe** par rapport à la base b_1 .

1.3. en coordonnées sphériques



$$\vec{V} = \rho \vec{e}_\rho$$

Remarque

\vec{e}_ρ est de norme unitaire mais n'est pas fixe par rapport à la base b_1 .

2. Composantes vectorielles d'un vecteur dans l'espace

On reprend l'exemple précédent, où $\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3$.

- V_1 est un scalaire, et fournit une **intensité** (norme, module).
- \vec{e}_1 est un vecteur de norme unitaire, et fournit un **sens** et une **direction**.

$V_1 \vec{e}_1$ peut très bien être écrit \vec{V}_1

Ainsi : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$: ce vecteur est la somme de ses trois **composantes vectorielles**.

Remarque

Écrire $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ ne fait plus apparaître la base explicitement, alors que l'écriture $\vec{V} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}_{b_1}$, si.

On privilégiera donc cette dernière lorsque l'on veut indiquer clairement la **base d'expression** du vecteur.

Opérations vectorielles

IV

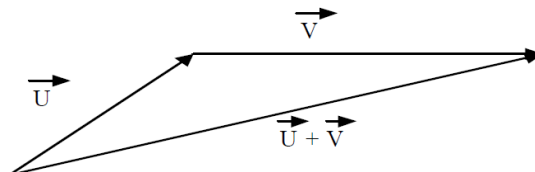
Soit $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe.

Soient U_1, U_2, U_3 et V_1, V_2, V_3 les coordonnées respectives de \vec{U} et \vec{V} dans la base B :

$$\vec{U} = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix}_B \text{ et } \vec{V} = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix}_B$$

1. Somme

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_1 + V_1) \vec{e}_1 + (U_2 + V_2) \vec{e}_2 + (U_3 + V_3) \vec{e}_3$$



2. Produit scalaire

Définition

Le produit scalaire de \vec{U} et \vec{V} est le **nombre réel** noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$ tel que :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos(\vec{U}, \vec{V})$$

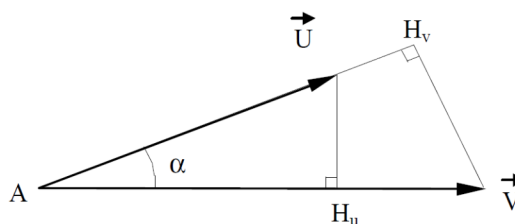
Propriétés

- Symétrie : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
- Bilinéarité : $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$
- Multiplication par un scalaire : $k(\vec{U} \cdot \vec{V}) = (k\vec{U}) \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot (k\vec{V})$

Lien entre produit scalaire et projections

Remarque

$$\begin{aligned} \bullet \overline{AH_u} &= \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{V}\|} \\ \bullet \overline{AH_v} &= \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\|} \end{aligned}$$



Dans le cas où \vec{U} et \vec{V} sont **unitaires** (de norme 1), les **projections** $\overline{AH_u}$ et $\overline{AH_v}$ sont **identiques**.

Avec les coordonnées des vecteurs exprimées dans une base orthonormée (rare en SII)

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_1 \cdot V_1 + U_2 \cdot V_2 + U_3 \cdot V_3$$

Fondamental

Si le produit scalaire est **nul**, alors : $\vec{U} = \vec{0}$, ou $\vec{V} = \vec{0}$,

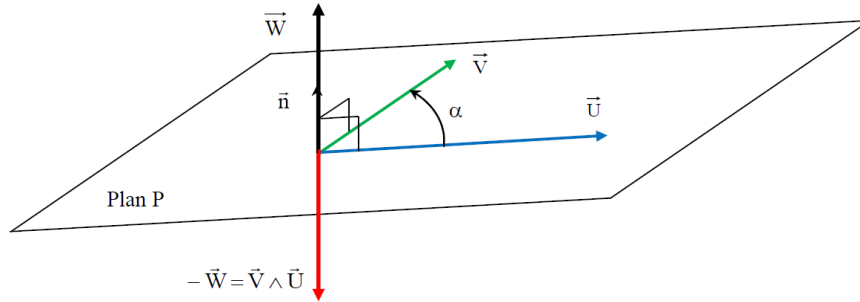
ou $\cos(\vec{U}, \vec{V}) = 0$ c'est-à-dire que \vec{U} et \vec{V} sont **orthogonaux**.

3. Produit vectoriel

Définition

Le produit **vectoriel** de \vec{U} et \vec{V} est le **vecteur** $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ tel que :

1. $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot |\sin(\vec{U}, \vec{V})|$
2. \vec{W} est orthogonal à \vec{U} et à \vec{V}
3. \vec{U}, \vec{V} et \vec{W} forment un trièdre direct.



Propriétés

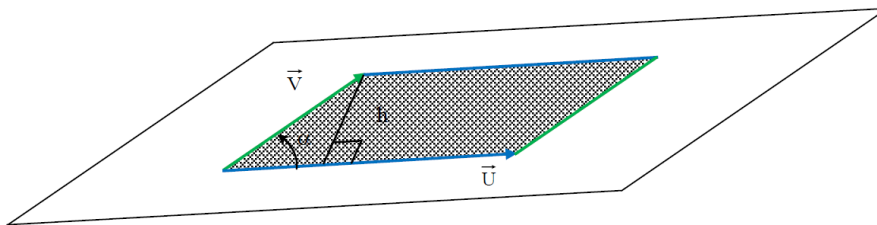
- **Antisymétrie** : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$
- **Bilinéarité** : $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$
- **Multiplication par un scalaire** : $k (\vec{U} \wedge \vec{V}) = (k \vec{U}) \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge (k \vec{V})$

Lien entre produit vectoriel et aire d'un parallélogramme

Remarque

La norme du produit vectoriel $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|$ correspond à l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs \vec{U} et \vec{V} :

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot |\sin \alpha| = \|\vec{U}\| \cdot h$$



Avec les coordonnées des vecteurs exprimées dans une base orthonormée (rare en SII)

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = (U_2 \cdot V_3 - U_3 \cdot V_2) \vec{e}_1 + (U_3 \cdot V_1 - U_1 \cdot V_3) \vec{e}_2 + (U_1 \cdot V_2 - U_2 \cdot V_1) \vec{e}_3$$

Fondamental

Si le produit vectoriel est **nul**, alors $\vec{U} = \vec{0}$, ou $\vec{V} = \vec{0}$,

ou $\sin(\vec{U}, \vec{V}) = 0$ c'est-à-dire que \vec{U} et \vec{V} sont **colinéaires**.

4. Produit mixte

Définition

Le **produit mixte** de \vec{U}, \vec{V} et \vec{W} est le **nombre réel** $[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}]$ tel que :

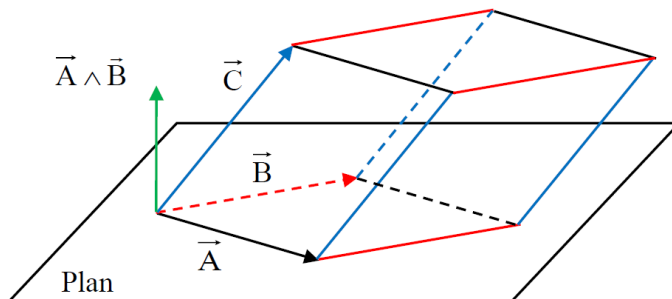
$$[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = (\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W}$$

Propriétés

- **Invariance par permutation circulaire** : $[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = [\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}] = [\vec{W}, \vec{U}, \vec{V}]$
- (Antisymétrie par permutation non-circulaire)

Lien entre produit mixte et volume d'un parallélépipède*Remarque*

Soient trois vecteurs (non nuls et non colinéaires) \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} . Le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs est donné par $V = |(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}|$

*Fondamental*

Soient les vecteurs non nuls \vec{U} , \vec{V} et \vec{W} : si $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W} = 0$ alors les trois vecteurs sont **coplanaires**.

En effet : le vecteur $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est (par définition du produit vectoriel) perpendiculaire au plan formé par \vec{U} et \vec{V} . Et si son produit scalaire avec \vec{W} est nul, c'est que \vec{W} lui est perpendiculaire. Donc ce dernier appartient au plan formé par \vec{U} et \vec{V} .

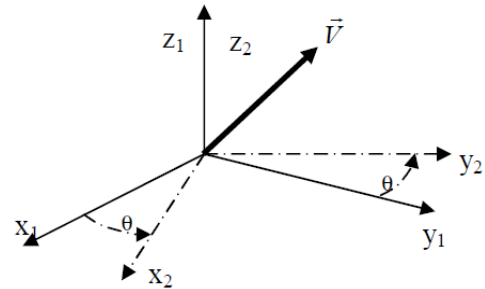
Changement de base

V

1. Bases 1 et 2 : exemple simple

On considère deux bases déduites l'une de l'autre par une rotation autour d'un des vecteurs. Ici la rotation se fait autour de $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ avec l'angle θ .

Ainsi : $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.



Changement de base par projection orthogonale

Méthode

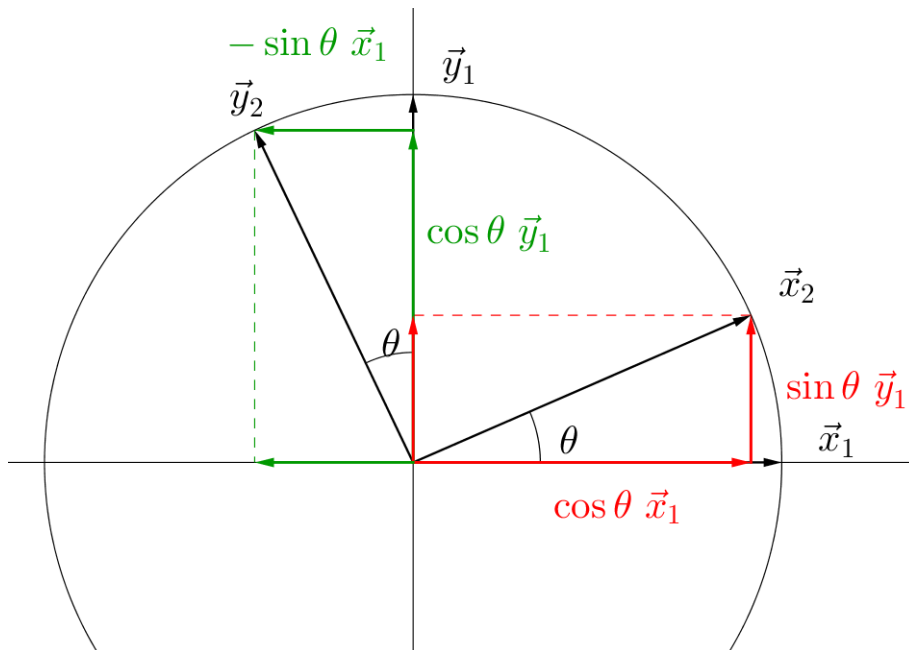
Chaque vecteur unitaire de la base b_1 peut être exprimé dans la base b_2 , et vice-versa.

Il est utile de se représenter mentalement le cercle trigonométrique (ici dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1)) où tous les vecteurs des bases, étant unitaires, auront leur extrémité sur le cercle de rayon 1.

La projection orthogonale va consister à remplacer **un** vecteur d'une base par la **somme** de **deux** vecteurs orthogonaux appartenant à l'autre base. L'ensemble des trois vecteurs tracés fera penser à un triangle rectangle où :

- le vecteur projeté correspondra à l'hypoténuse
- les deux vecteurs sommés correspondront aux côtés adjacent et opposé.

Par exemple : \vec{x}_2 sera remplacé par $\cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1$.



2. Exercice : de 2 vers 1

Soit $\vec{V} = a\vec{x}_2 + b\vec{y}_2 + c\vec{z}_2$.

Exprimer \vec{V} dans la base b_1 .

$$\vec{V} = \begin{matrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \end{matrix}_{b_1}$$

- $\vec{V} = \begin{vmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \end{vmatrix}_{b_1}$
- $\vec{V} = \begin{vmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \end{vmatrix}_{b_1}$
- $\vec{V} = \begin{vmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \end{vmatrix}_{b_2}$
- $\vec{V} = \begin{vmatrix} -a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \end{vmatrix}_{b_1}$

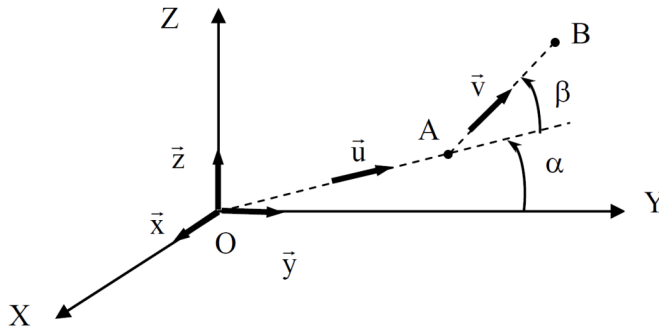
3. Exercice : de 1 vers 2

Soit $\vec{V} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1$. Exprimer \vec{V} dans la base b_2 .

- $\vec{V} = \begin{vmatrix} -a \cos \theta - b \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \end{vmatrix}_{b_2}$
- $\vec{V} = \begin{vmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \end{vmatrix}_{b_1}$
- $\vec{V} = \begin{vmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \cos \theta \end{vmatrix}_{b_2}$
- $\vec{V} = \begin{vmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta \\ c \end{vmatrix}_{b_2}$

1. Exercice : Vecteurs et opérations vectorielles

Soit $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct. Les vecteurs \vec{v} et \vec{u} sont des vecteurs unitaires définis dans le plan $(O; \vec{y}, \vec{z})$ comme le montre la figure ci-dessous :



Le vecteur \vec{OA} est défini par : $\vec{OA} = a\vec{u}$, et le vecteur \vec{AB} par $\vec{AB} = b\vec{v}$.

Question 1

Définir les **coordonnées** du vecteur \vec{OB} dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ en fonction de a, b, α et β .

Question 2

Déterminer la **norme** du vecteur \vec{OB} .

Question 3

Définir l'angle γ tel que $\gamma = (\vec{y}, \vec{OB})$.

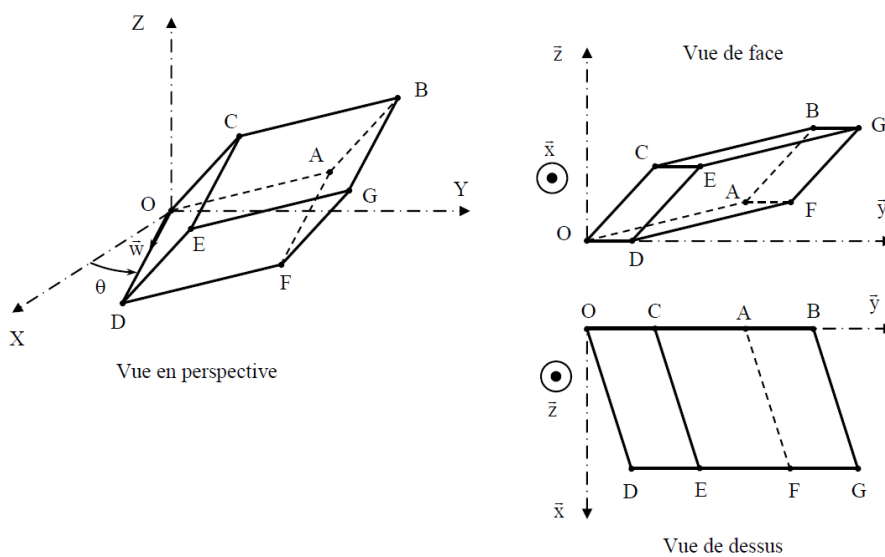
Question 4

Calculer : $\vec{OA} \wedge \vec{AB}, \vec{x} \wedge \vec{u}, \vec{y} \wedge \vec{v}$, et $(\vec{OA} \wedge \vec{OB}) \cdot \vec{x}$.

Question 5

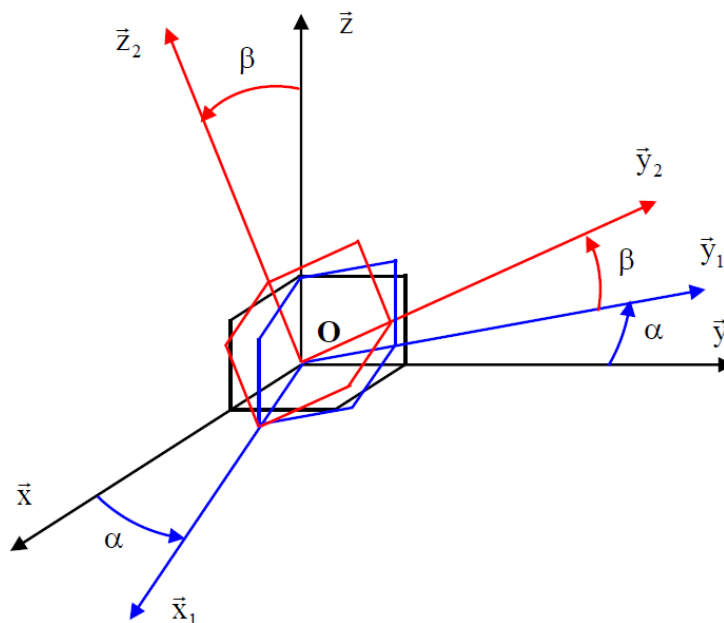
On donne : $\vec{OD} = c\vec{w}$ avec $\|\vec{w}\| = 1$ et $\vec{w} \cdot \vec{z} = 0$.

Déterminer en fonction de a, b, c, β et θ le volume défini par les figures ci-après.



2. Exercice : Changements de base

Soit $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct. La base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est définie par une rotation de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ autour de \vec{z} d'un angle α (défini positif). La base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est définie par une rotation de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ autour de \vec{x}_1 d'un angle β (défini positif).



Question 1

Tracer deux figures représentant les différentes bases sous forme de projections orthogonales par rapport aux vecteurs de rotation.

Question 2

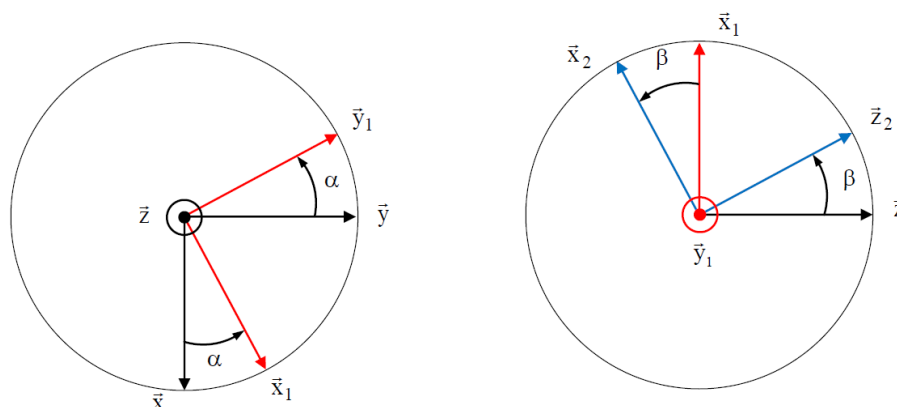
Calculer : $\vec{x} \wedge \vec{z}_2, \vec{y} \wedge \vec{z}_2$ et $\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2$.

Question 3

Calculer $(\vec{x} \wedge \vec{y}_2) \cdot \vec{x}_1$.

3. Exercice : Pertinence du choix de la base

Soient les bases $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ et $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$.



Question 1

Calculer $\vec{x} \wedge \vec{x}_2, \vec{y} \wedge \vec{x}_2$ et $\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2$.

Question 2

Calculer $(\vec{x} \wedge \vec{x}_2) \cdot \vec{z}_2$.

Question 3

Soit la relation vectorielle suivante : $a\vec{x}_2 - b\vec{y}_1 - c\vec{z}_2 = \vec{0} \text{ (1)}$.

Donner le système d'équations scalaires issu de la projection de l'équation vectorielle **(1)** dans la base \mathbf{B} .

Donner le système d'équations scalaires issu de la projection de l'équation vectorielle **(1)** dans la base \mathbf{B}_2 .

Conclure.